Cours de mathématiques P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

Fonctions vectorielles - Accroissements finis et formules de Taylor

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie p.
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. f est une application de I dans E,
et $f_1, \dots, f_p$ sont les applications composantes de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

1. Inégalités des accroissements finis

Théorème : Inégalité des accroissements finis :

Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, E)$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant M$.
Alors $\forall (x, x') \in I^2$, $\|f(x) - f(x')\| \leqslant M|x - x'|$.

Preuve :

$\forall (x, x') \in I^2$, $f(x) - f(x') = \int_{x'}^{x} f'(t)\, dt$. Ainsi $\|f(x) - f(x')\| \leqslant \left| \int_{x'}^{x} \|f'(t)\|\, dt \right| \leqslant M|x - x'|$.

Remarque :

L'hypothèse « f' bornée » est réalisée en particulier dans le cas d'un segment.

Corollaire 1 :

Soit $f : [a, b] \to E$, continue sur $[a, b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$, et telle qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leqslant M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M|b - a|$.

Preuve :

Soit $(x, x') \in]a, b[^2$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliqué entre x et x',
on a $\|f(x) - f(x')\| \leqslant M|x - x'|$. Il suffit alors de faire tendre x vers a, et x' vers b, et de conclure par continuité.

Corollaire 2 :

Toute application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle, dont la dérivée est bornée sur cet intervalle, y est lipschitzienne.
Plus précisément, si $f \in \mathscr{C}^1(I, E)$, f est k-lipschitzienne sur I, avec $k = \sup\limits_{x \in I} \|f'(x)\|$.

Théorème : Théorème de la dérivée continue :

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b], E)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$, et telle que $\lim\limits_{t \to a} f'(t) = L$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et $f'(a) = L$.

Preuve :

Soit $g(t) = f(t) - f(a) - (t - a)L$. g est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$, et à valeurs dans E.
$g'(t) = f'(t) - L$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \in]a, a + \alpha[\cap]a, b]$, $\|f'(t) - L\| < \varepsilon$.
Quitte à restreindre α, on peut supposer que $a + \alpha \leqslant b$.
Donc $\forall t \in]a, a + \alpha[$, $\|g'(t)\| \leqslant \varepsilon$, et g est continue sur $[a, a + \alpha]$.
Ainsi $\forall t \in [a, a + \alpha]$, $\|g(t) - g(a)\| \leqslant \varepsilon(t - a)$, d'après l'inégalité des accroissements finis.
Donc $\forall t \in]a, a + \alpha[$, $\|f(t) - f(a) - (t - a)L\| \leqslant \varepsilon(t - a)$, $(t - a > 0)$, et donc $\left\| \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} - L \right\| \leqslant \varepsilon$.

Donc la limite de $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ quand $t \to a$ vaut L.

f' est donc continue en a, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et $f'(a) = L$.

Corollaire 1 :

Soit $c\in]a,b[$, et $f\in\mathscr{C}^0([a,b],E)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,c[\cup]c,b]$.
On suppose que f' admet des limites à droites et à gauche en c.

1. f est dérivable à droite et à gauche en c.
2. $f_d'(c)=\lim\limits_{c^+} f'$, et $f_g'(c)=\lim\limits_{c^-} f'$.
3. f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$.

Remarque :

On peut écrire des variantes de ce corollaire si f' admet seulement une limite à droite ou à gauche en c, si on se place sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, ou si c est une borne de cet intervalle.

Corollaire 2 :

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, et $(a_0,\dots,a_N)$ une subdivision de $[a,b]$. Soit $f\in\mathscr{C}^{n-1}([a,b],E)$, de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}]a_i,a_{i+1}[$. On suppose que $f^{(n)}$ admet des limites à droite et à gauche en chaque a_i.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^n$ par morcaux sur $[a,b]$.

Exemple :

Soit $f\ :\ x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ si } x\neq 0\\ 0, \text{ si } x=0\end{cases}$. f est continue sur $\mathbb{R}$, et paire. On se limite à $[0,+\infty[$.

Sur $]0,+\infty[$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$.

Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$:

Par théorème, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

1. Hypothèse de récurrence : Pour $n\in\mathbb{N}$, $\exists P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x>0$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

   L'hypothèse est vérifiée aux rangs 0 et 1. Supposons alors $n\in\mathbb{N}$, et l'hypothèse vraie au rang n.
   Alors $f^{(n+1)}(x)=\left[\dfrac{P_n'(x)x^3-3nx^2P_n(x)}{x^{3n+3}}+\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\dfrac{2}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.
   L'hypothèse est vérifiée au rang $n+1$, elle est donc vraie par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$.
2. Hypothèse de récurrence : Pour $n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathscr{C}^n([0,+\infty[)$, et $f^{(n)}(0)=0$.
   L'hypothèse est vérifiée aux rangs 0 et 1. Supposons alors $n\in\mathbb{N}$, et l'hypothèse vraie au rang n.
   Si $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x)=0$, alors par théorème, $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n+1)}(0)=0$.
   L'hypothèse est vérifiée au rang $n+1$, elle est donc vraie par récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$.

2. Formules de Taylor

Dans ce paragraphe, n est un entier naturel non nul, f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I, et $a\in I$.

Définition :

La fonction polynôme $T_{n,f,a}$, ou plus simplement T_n définie par : $x\in I\mapsto\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$, est appelée polynôme de Taylor d'ordre n de f en a.
On appelle reste de Taylor d'ordre n de f en a l'application notée $R_{n,f,a}$, ou R_n : $x\in I\mapsto f(x)-T_n(x)$.

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral :

Soient $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, E)$, et $a \in I$. $\forall x \in I$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Remarque :

On obtient ainsi une expression exacte du reste, sous forme d'une intégrale.

Exemple :

En appliquant cette formule à $f : t \in [0,1] \mapsto e^{tz}$, $z \in \mathbb{C}$, entre 0 et 1 : $e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} z^{n+1} e^{tz}\,dt$.

En posant $z = a + ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit :

$$|R_n(z)| \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} |z|^{n+1} e^{at}\,dt \leqslant \max(1, e^a) \frac{|z|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \max(1, e^a) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on déduit : $|R_n(z)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

On retrouve ainsi que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge, et que $\sum_{n=0}^{\infty} z^{nover} n! = e^z$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

Théorème : Inégalité de Taylor-Lagrange :

Soient $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in I$, $\|f^{(n)}(t)\| \leqslant M$.

Alors $\forall x \in I$, $\left\| f(x) - \sum_{k=0} t\,n-1 \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant M \frac{|x-a^n|}{n!}$.

Proposition :

Soient $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, $n \geqslant 1$, et $a \in I$.

Si $f^{(n)}$ est bornée sur I, alors $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, $\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \left(\sup_{t \in I} \|f^{(n)}(t)\| \right) \frac{|h|^n}{n!}$.

Proposition (hors programme) :

Soient $f \in \mathscr{C}^n(I, R)$, $n \geqslant 1$, et $a \in I$.

$\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, il existe $\theta_h \in]0,1[$ tel que $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + h\theta_h)$.

Remarques :

Ce résultat est hors-programme, et doit donc être redémontré lorsqu'il est utilisé.

Il se prouve à l'aide du théorème de Rolle, en introduisant une fonction auxiliaire adaptée.

Ce résultat n'est valable que dans le cas réel.

Théorème :

Soient $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$, et $a \in I$. Alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$.

Remarque :

Il s'agit ici d'un résultat local, dont une des principales applications est l'obtentions des développements limités.

* * * * *